Uvod u elektromagnetnu hidrodinamiku

10

Hidrodinamičko opisivanje procesa u plazmi

- U slučaju srazmerno velikih gustina i dovoljno visokih kolizionih frekvenci, plazma se može opisivati na osnovu formalizma neprekidnih sredina.
- Dovoljno velike gustine i kolizione frekvence omogućavaju uvođenje pojma *delića,* koji je neophodan za teorijski prelaz na neprekidnu sredinu.
- MHD je najjednostavniji hidrodinamički model.
- Plazma se smatra kao fluid ili smeša fluida koji imaju sposobnost električne provodljivosti

Elektromagnetna hidrodinamika

- Tretira fluid koji ima osobinu električne provodnosti – “elektroprovodni fluid”.
- Plazma jeste elektroprovodni fluid.
- U odnosu na obični fluid prilikom proučavanja elektroprovodnog fluida, javljaju se dva nova momenta:
  – Za ponašanje elektroprovodnog fluida postaju bitne **elektromagnetne interakcije**. Za opisivanje stanja ovakvog fluida, pored standardnih hidrodinamičkih veličina (r, p, v, T) moraju se uvesti električno i magnteno polje **E**(x,z,y,t) i **B**(x,z,y,t).

nastavak

- Pored hidrodinamičkih jednačina moraju se uzeti u obzir i elektrodinamičke (Maxwell-ove) jednačine. Pri tome se struja pomeraja u Maxwellovoj jednačini za rotor magnetnog polja nejčešće sme zanemariti.
  - S druge strane, hidrodinamički i elektrodinamički faktori su tako međusobno povezani, da se hidrodinamičke i elektrodinamičke jednačine ne mogu rešavati zasebno.
  - To znači da imamo posla sa problemom *samousaglašenog određivanja hidrodinamičkih i elektrodinamičkih veličina.*

Polazne jednačine elektromagnetne hidrodinamike

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\left(\rho\,\mathbf{v}\right) = 0,$$

$$\rho\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho\mathbf{f} - \nabla p + \rho_{el}\mathbf{E} + \mathbf{j}\times\mathbf{B} + \mu\Delta\mathbf{v} + \left(\lambda + \frac{1}{3}\mu\right)\nabla\left(\nabla\cdot\mathbf{v}\right),$$

$$p = F\left(\rho\right),$$

$$\mathbf{j} = \sigma\left(\mathbf{E} + \mathbf{v}\times\mathbf{B}\right) + \rho_{el}\mathbf{E},$$

$$\mathrm{div}\mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho_{el},$$

$$\mathrm{div}\mathbf{B} = 0,$$

$$\mathrm{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},$$

$$\mathrm{rot}\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{j}.$$

Diskusija u vezi sa ρ_{el}

- U polaznim jednačinama EMHD zadržani su članovi koji zavise od gustine prostornog naelktrisanja ρ_{el}.
- Kada možemo staviti $\rho_{el}=0$?
- Neka je iz ma kog uzroka, u izvesnoj makroskopskoj zapremini u posmatranom elektroprovodnom fluidu, došlo do narušavanja elektroneutralnosti i neka je sistem posle toga prepušten samom sebi.
- Prostorno naelektrisanje u uočenoj tački se menja u toku vremena, usled pokretljivosti naelektrisanih čestica odvijaju se paralelno dva procesa: <u>elektronske plazmene oscilacije i difuzija elektrona.</u>

$$\rho_{el}(t) = \rho'_{el}(t) + \rho''_{el}(t)$$

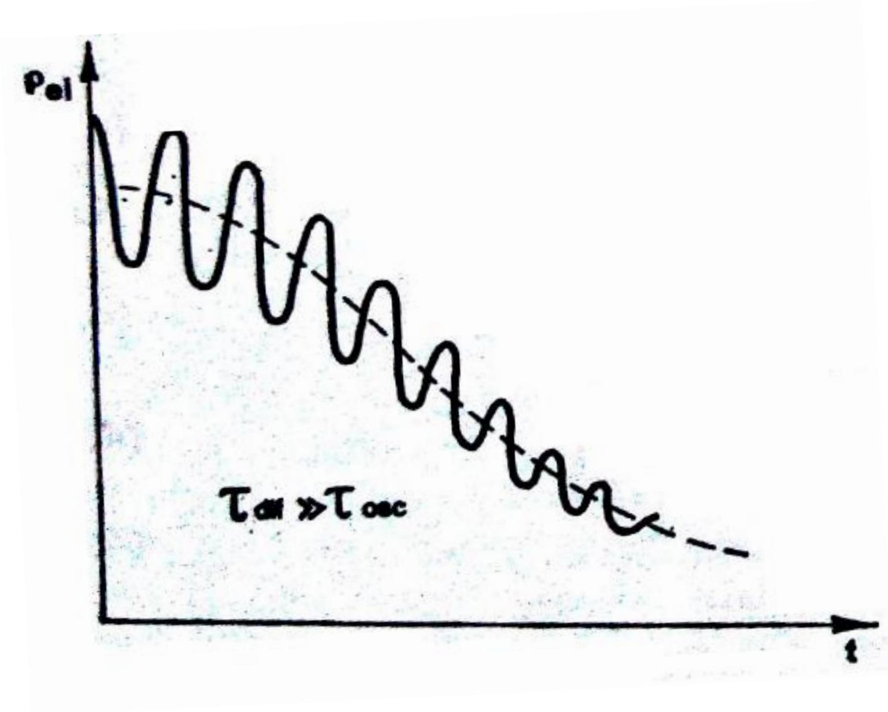
Procena ρ'_{el} i ρ''_{el}

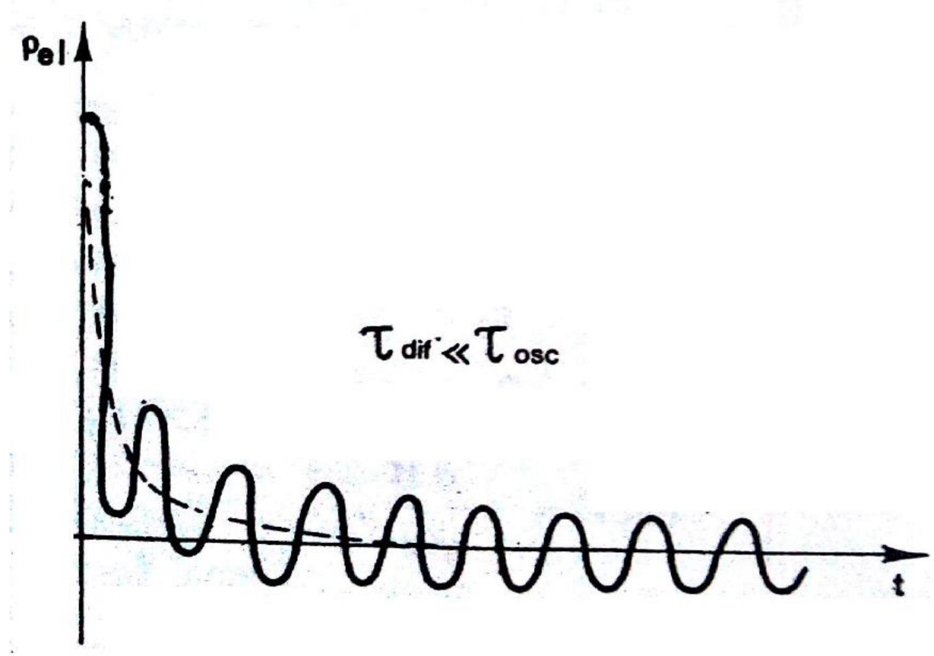
- U oba procesa glavnu ulogu igraju elektroni, jer imaju manju masu i veću pokretljivost od jona.

$$\rho_{el}(t) = \rho'_{el}(t) + \rho''_{el}(t)$$

- Sabirak $\rho'_{el}(t)$ označava uticaj difuzije i pritom je ovaj sabirak srazmerno sporo i monotono opadajuća funkcija vremena, i na nju se superponiraju vrlo brze oscilacije frekvencije ω_{pe} predstavljene sabirkom $\rho''_{el}(t)$.
- Označimo li sa τ_{dif} i τ_{osc} karakteristična vremena za procese pri kojima $\rho'_{el}(t)$ i $\rho''_{el}(t)$ opadaju na nulu (prvi sabirak monotono a drugi oscilatorno) možemo konstatovati da $\rho_{el}(t)$ ima jako različit oblik u slučajevima $\tau_{dif} \ll \tau_{osc}$ i $\tau_{dif} \gg \tau_{osc}$.

Vremenska zavisnost prostornog naelektrisanja od uzajamnog odnosa karakterističnih vremena za prigušenje plazmenih oscilacija i resorpciju prostornog naelektrisanja putem difuzije





Procena τ_{osc} i τ_{dif}

- Ako je ν_e koliziona frekvencija elektrona, a $\tau_e=1/\nu_e$ njihovo koliziono vreme, biće sigurno $\tau_{osc}\sim\tau_e$.
- Karakteristično vreme τ_{dif} lako dobijamo ako uočimo da makroskopsku gustinu prostorsnog naelektrisanja predstavlja veličina $\rho'_{el}(t)$.

$$\frac{\partial \rho_{el}}{\partial t} + div\mathbf{j} = 0, \qquad \tau_{dif} \sim \frac{\varepsilon_0}{\sigma}$$

$$\rho_{el} \approx \rho'_{el}, \quad \mathbf{j} \approx \sigma\mathbf{E}, \qquad \sigma = \frac{e^2 n_e}{m_e \nu_e}$$

$$\rho'_{el}(t) = \rho'_{el}(0)\exp\left(-\frac{\sigma}{\varepsilon_0}t\right), \qquad \tau_{dif} \sim \frac{\varepsilon_0 m_e}{e^2 n_e}\frac{1}{\tau_e}$$

Diskusija

- Ako posmatrani elektroprovodni fluid ima veliku provodnost, biće τ_e veliko, a τ_{dif} malo.
- Znači, važiće $\tau_{dif} << \tau_{osc}$, pa će prostorna gustina naelektrisanja biti makroskopski jednaka nuli. U tom slučaju je tendencija ka elektroneutralnosti veoma izražena.
- Ako je, pak provodnost mala, τ_e je malo a τ_{dif} veliko, pa se zbog $\tau_{dif} >> \tau_{osc}$, plazmene oscilacije brzo amortizuju i zavisnost prostornog naelektrisanja od vremena je određene prvenstveno difuzijom.

<u>Magnetna hidrodinamika</u>

- U slučaju srazmerno visoke elektroprovodnosti sistem jednačina EMHD može se uprostiti.
- S jedne strane,može se staviti ρ_{el}=0.
- S druge strane, kod plazme visoke elektroprovodnosti fizička situacija se svodi na <u>*interakciju provodnog fluida sa magnetnim poljem*</u>.
- Ovo će biti toliko tačnije ukoliko je elektroprovodnost veća, pa je, pri dovoljno visokoj elektroprovodnosti, <u>energija električnog polja zanemarljiva u poređenju sa energijom magnetnog polja</u>.
- <u>Osnovne veličine su: ρ, p, **v** i **B**</u>

MHD aproksimacija

- Zatvoreni sistem jednačina:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\left(\rho\,\mathbf{v}\right) = 0,$$

$$\rho\,\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho\mathbf{f} - \nabla p + \frac{1}{\mu_0}(\mathrm{rot}\mathbf{B}) \times \mathbf{B} + \mu\Delta\mathbf{v} + \left(\lambda + \frac{1}{3}\mu\right)\nabla\left(\nabla\cdot\mathbf{v}\right),$$

$$p = F\left(\rho\right),$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathrm{rot}(\mathbf{v}\times\mathbf{B}) + \nu_m\Delta\mathbf{B},$$

$$\mathrm{div}\mathbf{B} = 0.$$

- *Za domaći*: izvesti četvrtu jednačinu.

nastavak...

- Da bi se jednačine MHD mogle rešavati, potrebno je da butu poznate zapreminske sile **f**(x,y,z,t) kao i svi početni i granični uslovi.
- Kad se odrede osnovne MHD veličine, preostale ed. veličine se nalaze iz podesno modifikovanih jednačina:

$$\mathbf{j} = \frac{1}{\mu_0} rot\mathbf{B}, \quad \mathbf{E} = \frac{1}{\sigma}\mathbf{j} - \mathbf{v} \times \mathbf{B}, \quad \rho_{el} = \varepsilon_0 div\mathbf{E}$$

Najkarakterističnija jednačina MHD

- Jednačina koja pokazuje zbog čega nastaje lokalna promena magnenog polja

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathrm{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \nu_m \Delta \mathbf{B}$$

- Analognu jednačinu nalazimo kod barotropnog neprovodnog fluida za vektor vrtloženja

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} rot\mathbf{v}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} = \mathrm{rot}(\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}) + \nu_m \Delta \boldsymbol{\omega}$$

Difuzija magnenog polja

- Pretpostavimo da je posmatrani elektroprovodni fluid (plazma) u miru (**v**=0). Dobija se:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nu_m \Delta \mathbf{B}$$

- Ova jednačina, zajedno sa div**B**=0 (jednačine za magnetno polje), mogu se rešavati odvojeno od ostalih MHD jednačina.
- Jednačina je tipična jednačina difuznog procesa, pri čemu parametar ν_m igra ulogu koeficijenta difuzije.

nastavak...

- <u>Magnetno polje difunduje u ili iz posmatranog fluida (pazme).</u>
- Difuzioni karakter difuznih procesa je u očevidnoj vezi sa elektroprovodnošću sredine i zakonima elektromagnetne indukcije.
- *Objašnjenje: ukoliko se u oblasti oko plazme (fluida) uspostavi neko magnetno polje, u fluidu se indukuju struje koje svojim magnetnim poljem teže da ponište spoljašnje magnetno polje. Usled sudara među česticama, indukovane struje slabesa vremenom, pa se u oblasti zauzetoj plazmom postepeno uspostavlja spoljašnje magnetno polje, što se interpretira kao njegovo difundovanje u fluid.*

Domaći

- Potražiti u literaturi kako se rešava difuziona jednačina *sa* konstantnim koeficijentom difuzije *D*:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}$$

Zamrznutost magnetnog polja

- Razmotrimo slučaj provodnog fluida beskonačne elektroprovodnosti: $1/\sigma=0$. Tada jedna za magnetno polje postaje:

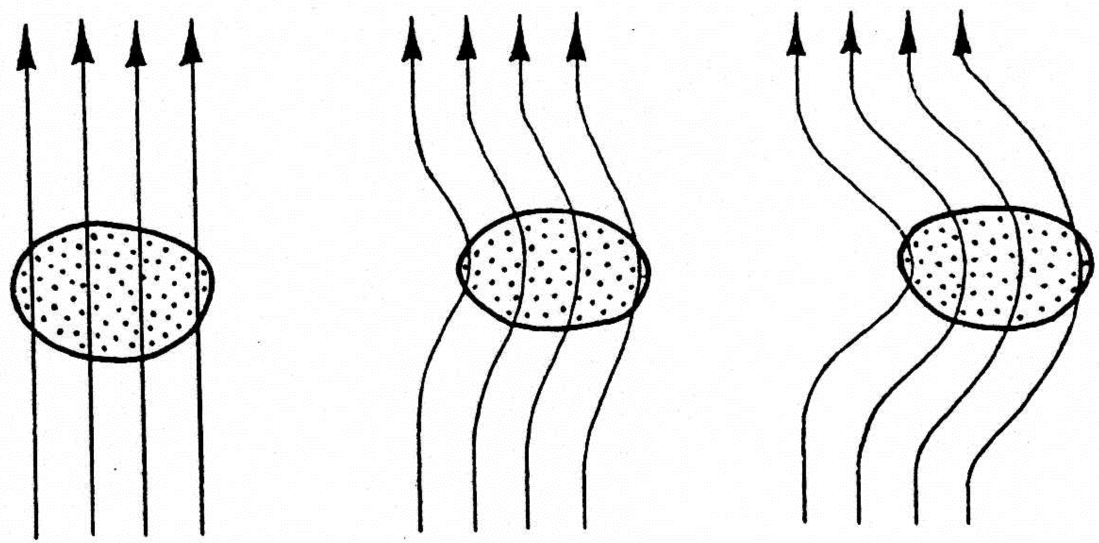
$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = rot\left(\mathbf{v} \times \mathbf{B}\right)$$

- Lokalne promene magnetnog polja sa vremenom određuju se u ovom slučaju isključivo konvekcionim efektima.
- Magnetno polje zadovoljava i jednačinu div**B**=0
- Ove dve jednačine su matematički potpuno analogne jednačinama za vektor vrtloženja $\boldsymbol{\omega}$ kod idealnog barotropnog fluida podvrgnutog dejstvu potencijalnih zapreminskih sila.
- Treba očekivati važenje magnetnih analogona poznatih Helmolc-ovih teorema o vrtložnom proticanju.

Magnetni analogoni Helmholc-ovih teorema

- 1) *Fluks magnetnog polja kroz neku zatvorenu konturu sastavljenu od istih delića provodnog fluida beskonačne elektroprovodnosti se ne menja u toku kretanja ove konture.*
- Šta ako bi se spomenuti magnetni fluks menjao?
- 2) *delići fluida beskonačne elektroprovodnosti koji su se u jednom trenutku vremena nalazili na jednoj magnetnoj liniji sile ostaju na jednoj magnetnoj liniji sile i u svakom daljem trenutku vremena u toku kretanja.*
- Prema ovoj teoremi, elektroprovodni fluid kod koga je $1/\sigma=0$ se kreće tako kao da su njegovi delići "zalepljeni" za magnetne linije sile. Ovo se slikovito izražava kao *"zamrznutost"* magnetnih linija sile.

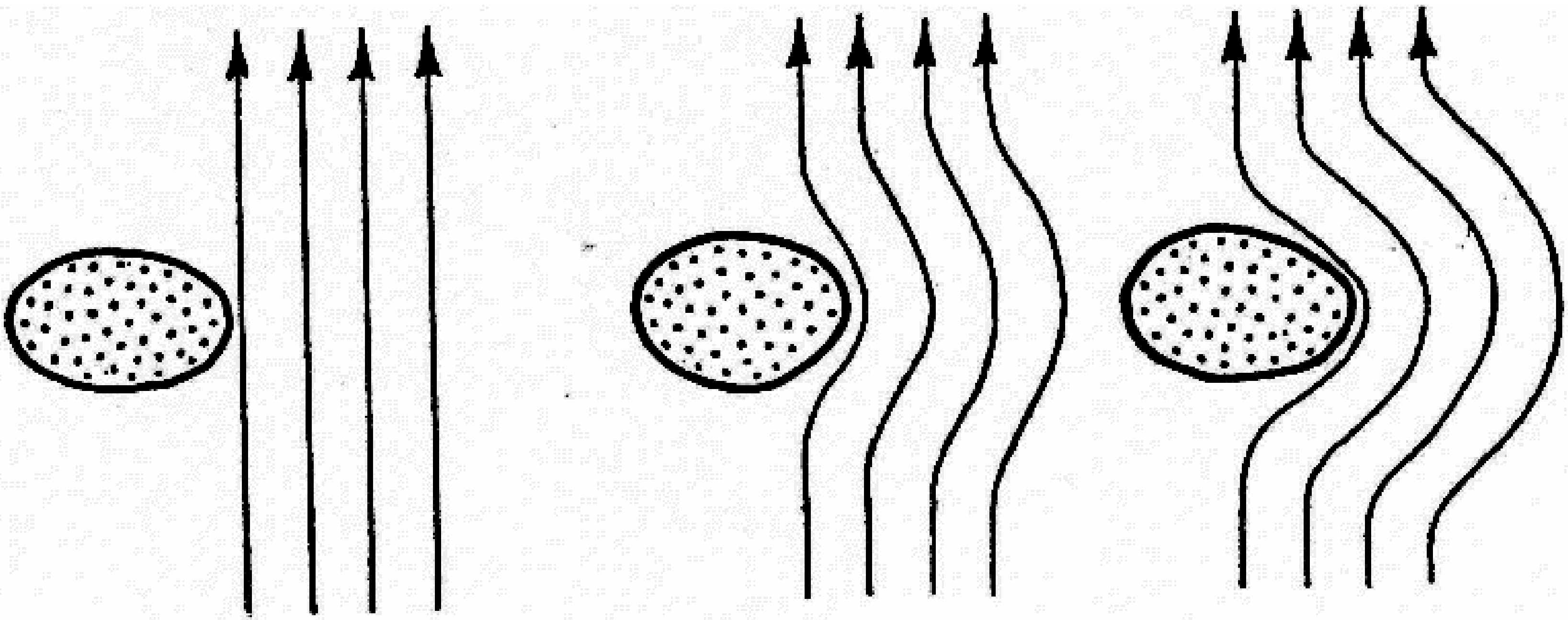
Efekat samoindukcije



Slika 4.2.

Plazmeni „oblačak" u magnetnom polju, primoran da se kreće udesno (na primer, zbog **E**×**B**-drifta usled električnog polja normalnog na ravan crteža), „povlači" za sobom magnetne linije sile, pošto se magnetno polje indukovanih struja superponira na spoljašnje polje. Polje u „oblačku" ostaje „zamrznuto" na početnoj vrednosti, ako je $\frac{1}{\sigma}=0$

Efekat samoindukcije



Slika 4.3.

Magnetno polje struja indukovanih u plazmenom „oblačku" koji se kreće u susret magnetnom polju se superponira na spoljašnje magnetno polje i polje u „oblačku" ostaje „zamrznuto" na vrednosti nula, ako je $\frac{1}{\sigma} = 0$

Magnetni Rejnold-sov (Reynold) broj

- Da bismo mogli odrediti relativnu ulogu konvekcionih i difuznih efekata u određivanju lokalne promene magnetnog polja u fluidu sa vremenom i formulisati uslov pod kojim će magnetno polje biti zamrznuto, potrebno je naći neki *bezdimenzioni kriterijum*.
- Podesno je u tom cilju uporediti konvekcioni i difuzioni član u jednačini:

$$\frac{\left|\mathrm{rot}(\mathbf{v}\times\mathbf{B})\right|}{\left|\nu_m \Delta\mathbf{B}\right|} \sim \frac{\frac{1}{D} VB}{\nu_m \frac{1}{D^2} B} = \frac{DV}{\nu_m} = Re_m$$